

# Forza Coulomb e Campo Elettrico

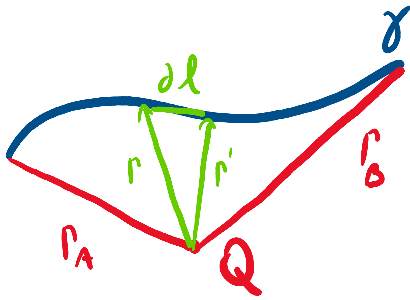
lunedì 4 dicembre 2023 23:01

$$|F| = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

# Lavoro

lunedì 4 dicembre 2023 23:04



$$L = F \cdot S$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \int_{\gamma} F dl = \int_{\gamma} \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}}{r^3} dr = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\bar{r}}{r^3} dr = \\ &= \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot d(\bar{r} \cdot \bar{r}) = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^3} d(r^2) = \\ &= \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{1}{2} \cdot \frac{2r}{r^3} dr = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

# Energia Potenziale Elettrica e Potenziale Elettrico

lunedì 4 dicembre 2023 23:11

Siccome  $\int_{A=B} F dl = 0 \Rightarrow$  Il campo elettrico è conservativo

$\Rightarrow$

$$L = U_A - U_B$$

Con  $U = \frac{Q q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$

Energia Potenziale Elettrica

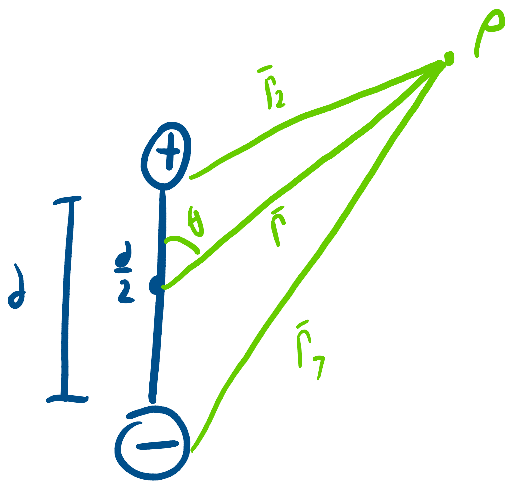
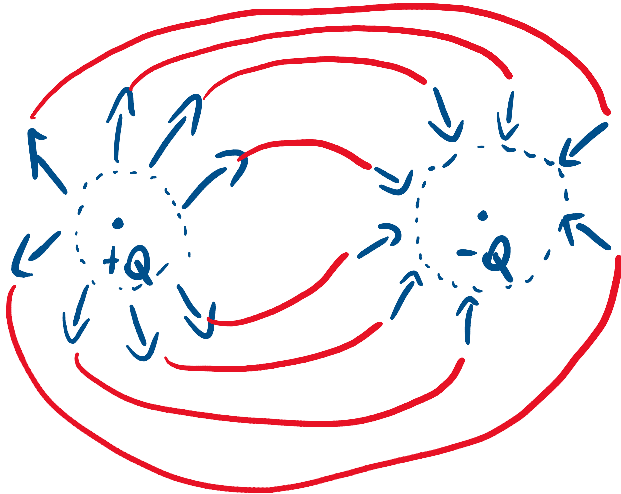
Il Potenziale  $V$  è dato da:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



# .Dipolo

lunedì 4 dicembre 2023 23:17



$$\text{Sia } r \gg d \Rightarrow r_1 \approx r_2 \approx r$$

$$r_1 = r + \frac{d}{2}$$

$$r_2 = r - \frac{d}{2}$$

Calcoliamo il potenziale elettrico

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 + r_2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{r} + \frac{d}{2})^2 - (\bar{r} - \frac{d}{2})^2}{r^2 (2r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{r}^2 + \frac{d^2}{4} + \bar{r}d) - (\bar{r}^2 + \frac{d^2}{4} - \bar{r}d)}{2r^3} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\bar{r}d}{2r^3} = \frac{Q d \bar{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \stackrel{?!!!}{=} \frac{\rho \cos(\theta) r}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\rho \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

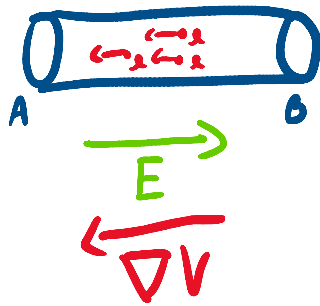
Il nostro scopo è trovare  $\vec{E}$ :

\*Da finire\*

# Corrente Elettrica

lunedì 4 dicembre 2023 23:31

CONDUTTORE ↴



$$V_A = V_B$$

All'interno del conduttore  $\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla V = 0$   
 $\Rightarrow$  Tutti i punti hanno lo stesso potenziale

## INTENSITÀ DI CORRENTE

$$i = \frac{dq}{dt}$$

## DENSITÀ DI CORRENTE

$$J = \frac{i}{dS} = \frac{dq}{dt dS}$$

Da cui

$$i = \Phi_S(J) = \int_S J \cdot \hat{n} dS$$



# Teorema della Divergenza

lunedì 4 dicembre 2023 23:42

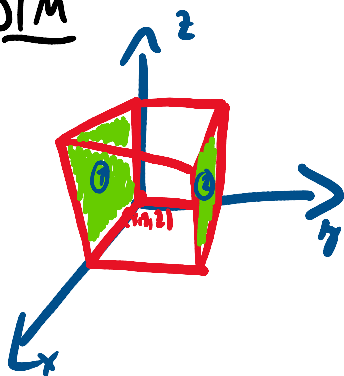
TEO :

Sia  $\vec{F}$  campo vettoriale

Allora

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

DIM



$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_1 \, dS + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_2 \, dS + \int_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n}_3 \, dS + \int_{S_4} \vec{F} \cdot \hat{n}_4 \, dS + \int_{S_5} \vec{F} \cdot \hat{n}_5 \, dS + \int_{S_6} \vec{F} \cdot \hat{n}_6 \, dS$$

Analizziamo per il momento, solo i due integrali

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_1 \, dS = \int_{S_1} -F_y(1) \, dS \approx -F_y(1) \, dS \approx -F_y(1) \Delta x \Delta z$$

$\hat{n}_1 = (0, -1, 0)$

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_2 \, dS = \int_{S_2} F_y(2) \, dS \approx F_y(2) \, dS \approx F_y(2) \Delta x \Delta z \approx (F_y(1) + \frac{dF_y}{dy} \Delta y) \Delta x \Delta z$$

$\hat{n}_2 = (0, 1, 0)$

Sommando membro a membro, si ha:

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_1 \, dS + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_2 \, dS = \frac{dF_y}{dy} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Analogamente per gli altri.

Si ha, allora che:

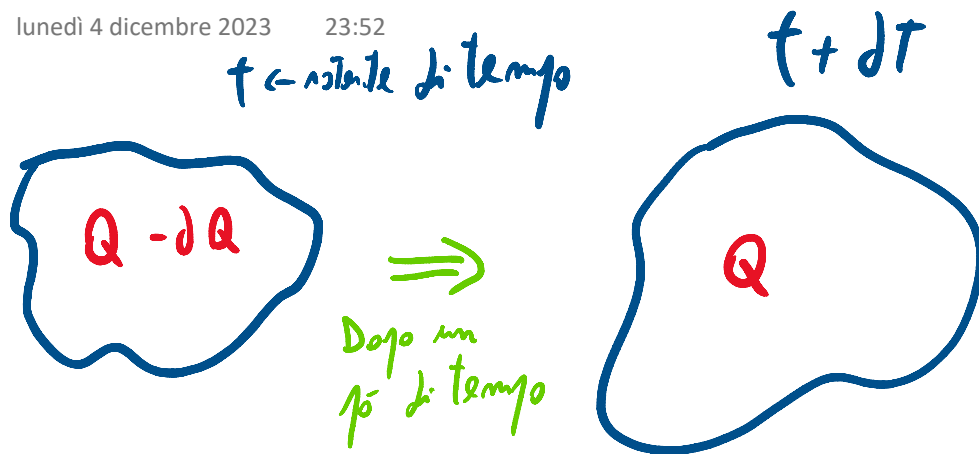
$$\int_S \bar{F} \hat{n} \, dS \approx \Delta x \Delta y \Delta z \left( \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} \right)$$
$$\approx \Delta V \left( \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} \right)$$

$$\Rightarrow \int_S \bar{F} \hat{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$



# Equazione di Continuità

lunedì 4 dicembre 2023 23:52



Per il Principio di Conservazione della Carica,  $-dQ$  ha attraversato la superficie  $\Rightarrow$  Si crea Flusso

$$\dot{q} = - \frac{dQ}{dt}$$

$$\dot{q} = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} \, dS$$

$$\Rightarrow \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} \, dS = - \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} \, dS + \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \leftarrow \rho = \frac{dQ}{dV}$$

$$\Rightarrow \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} \, dS + \frac{\rho dV}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} \, dS + \int_V \frac{\rho}{dt} \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \int_V \frac{\rho}{\partial t} \, dV = 0$$

TEO DELLA DIVERGENZA

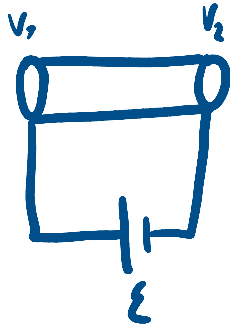
$$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV + \int_V \frac{\rho}{\partial t} \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{[Equazione di Continuità]}$$



# Circuiti Elettrici

martedì 5 dicembre 2023 00:01



I Legge di Ohm :

$$\Delta V = R \cdot i$$

Il Lavoro è dato da:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

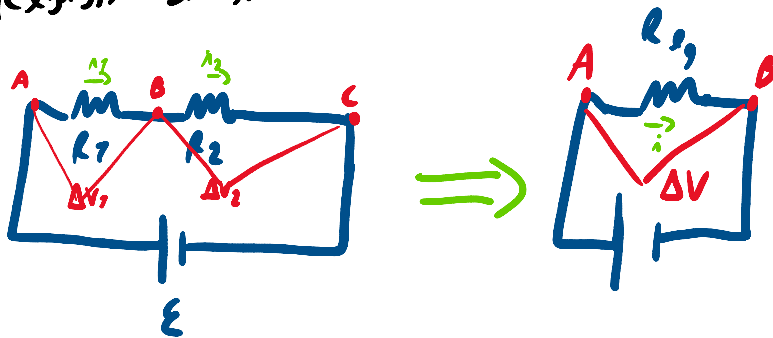
$$\Delta V = i \cdot R$$

$$\begin{aligned} dL &= dq (V_1 - V_2) = dq \Delta V = i dt \Delta V = i dt \cdot i \cdot R = \\ &= i^2 \cdot R dt \end{aligned}$$

La Potenza sarà allora :

$$W = \frac{dL}{dt} = i^2 \cdot R$$

• Resistenze in SERIE :



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$i_1 = i_2 = i \quad , \quad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

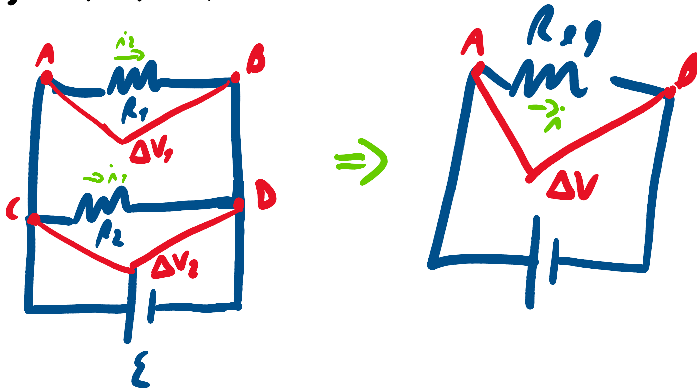
$$\Delta V = i \cdot R_{\text{sg}}$$

$$\Delta V_1 = i_1 \cdot R_1$$

$$\Delta V_2 = i_2 \cdot R_2$$

$$\Rightarrow R_{\text{sg}} = \frac{\Delta V}{i} = \frac{\Delta V_1}{i} + \frac{\Delta V_2}{i} = \frac{i_1 \cdot R_1}{i} + \frac{i_2 \cdot R_2}{i} = R_1 + R_2$$

• Widerstände in PARALLELO



$$\frac{1}{R_{\text{sg}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$\Delta V = i \cdot R_{\text{sg}}$$

$$\Delta V_1 = i_1 \cdot R_1$$

$$\Delta V_2 = i_2 \cdot R_2$$

$\Rightarrow$

$$i = i_1 + i_2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\Delta V}{R_{\text{sg}}} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_{\text{sg}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

I Legge Kirchhoff :

## I Legge Kirchhoff :

Nei nodi di un circuito elettrico si ha:

$$\sum_K i_k = 0$$

## II Legge di Kirchhoff :

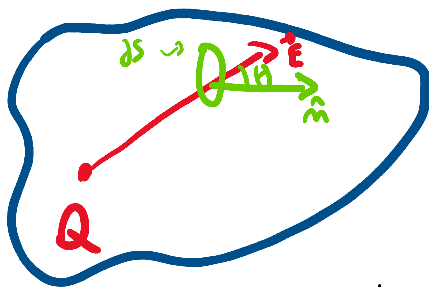
In ogni maglia reale che:

$$\sum_K \mathcal{E}_K = \sum_K i_k R_K$$



# Teorema di Gauss

martedì 5 dicembre 2023 00:22



Il flusso infinitesimo è dato da:

$$\begin{aligned} d\Phi(E) &= E \hat{n} dS = E \cdot \cos(\theta) dS = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\theta) dS \end{aligned}$$

Consideriamo una superficie chiusa, si ha che:

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_S E \cdot \cos(\theta) dS = \\ &= \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\theta) dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r^2} \cos(\theta) dS = \\ &\stackrel{\cos(\theta) \cdot dS = dS'}{\downarrow} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r^2} dS' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega \stackrel{\uparrow}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \int_S \frac{dS'}{r^2} = \int d\Omega \quad \int d\Omega = 4\pi \end{aligned}$$

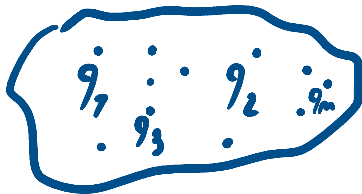
# Prima Equazione di Maxwell

martedì 5 dicembre 2023 00:32

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

DIM

Consideriamo il flusso di più cariche all'interno di una superficie



Risulta che

$$\Phi(E) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{\sum_k q_k}{\epsilon_0}$$

Ora

$$\sum_k q_k = \int_V \rho dV$$

Per cui

$$\int_S E dS = \int_V \rho dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

⇒ <sup>TEO DIVERG</sup>  $\int_V \nabla E dV = \int_V \rho dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \int_V \nabla E \, dV = \int_V \rho \, dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

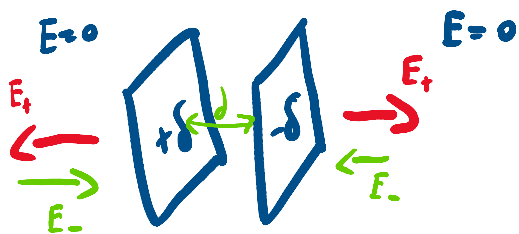
$$\Rightarrow \nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



# Condensatore Piano

martedì 5 dicembre 2023 11:11

Un condensatore è un dispositivo costituito da 2 piatti messi l'uno di fronte all'altro



$$E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Le abbiamo ricavate col teorema di Gauss su un piano infinito



$$\phi_s(E) = 2 \int_{SA} E ds = 2E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

All'interno si ha:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



# Teorema di Stokes

martedì 5 dicembre 2023 11:22

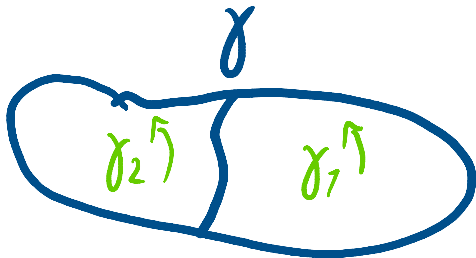
TEO

Sia  $\vec{F}$  campo vettoriale e  $\gamma$  curva chiusa.

Allora

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

DIM

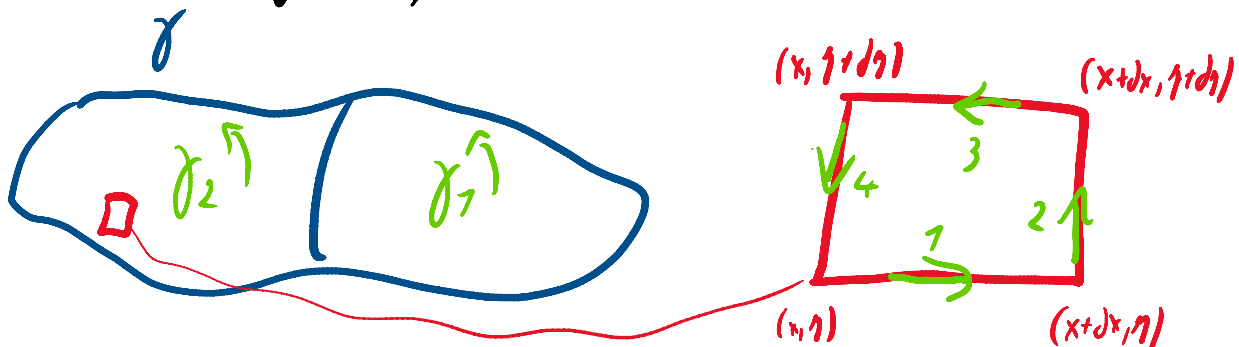


Suddividiamo  $\gamma$  in due parti.

Allora

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Suddividiamo inoltre  $\gamma$  in quadrati infinitesimi



Partenti

$$\begin{aligned}
F \cdot d\mathbf{l} &= F_x(1) dx + F_y(2) dy - F_x(3) dx - F_y(4) dy = \\
&= F_x(1) dx - F_x(3) dx + F_y(2) dy - F_y(4) dy = \\
&= dx dy \left( \frac{F_x(1)}{dy} - \frac{F_x(3)}{dy} + \frac{F_y(2)}{dx} - \frac{F_y(4)}{dx} \right) = \\
&= dx dy \left( -\frac{F_x(3) - F_x(1)}{dy} + \frac{F_y(2) - F_y(4)}{dx} \right) = \\
&= dx dy \left( -\frac{dF_x}{dy} + \frac{dF_y}{dx} \right) = dx dy \cdot (\nabla \wedge F)_z \\
&= (\nabla \wedge F)_z \cdot dS = (\nabla \wedge F) \cdot \hat{n} dS
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\bar{F} d\mathbf{l} = (\nabla \wedge F) \hat{n} dS$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \bar{F} d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge F) \hat{n} dS$$



# Capacità

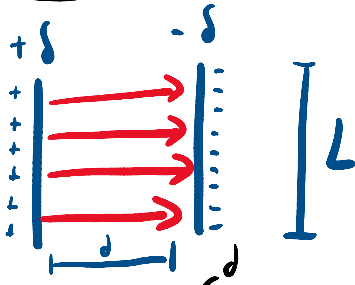
martedì 5 dicembre 2023

11:32

$$C = \frac{Q}{V}$$

↑  
capacità

## Condensatore Piano

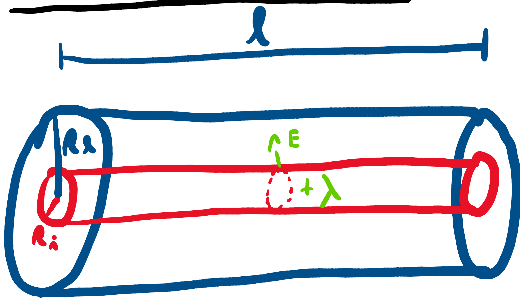


$$V_+ - V_- = \int_0^d E dl = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dl = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

↑  
lo sappiamo  
di prima

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} = \frac{Q \epsilon_0}{\sigma \cdot d} \stackrel{\sigma = \frac{Q}{S}}{\downarrow} = \frac{\sigma \cdot S \cdot \epsilon_0}{\sigma \cdot d} = \frac{S \cdot \epsilon_0}{d}$$

## Condensatore Cilindrico



$\lambda$  è la carica contenuta in un tratto di cilindro di lunghezza unitaria.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left[ \begin{array}{l} \text{È stata ottenuta applicando Gauss ad un filo infinito} \\ \int E ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \end{array} \right]$$

$$Q = \lambda l$$

$$Q = \lambda l$$

Dimagrire

$$V_+ - V_- = \int_0^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_i}^{R_e} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_i}^{R_e} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dl = \int_{R_i}^{R_e} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$$

• Condensatore Sferico



$$V_+ - V_- = \int_{R_i}^{R_e} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_i}^{R_e} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{R_i}^{R_e} =$$

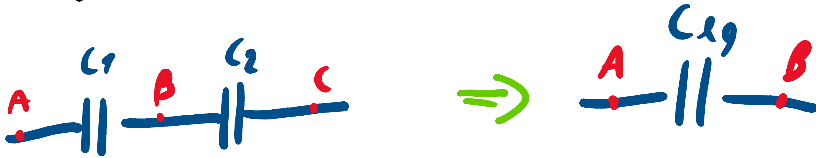
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}}$$

• Condensatori in SERIE

Ceq

• Condensatori in SERIE



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V_1} \quad Q_{eq} = Q_1 = Q_2$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{\Delta V_2} \quad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

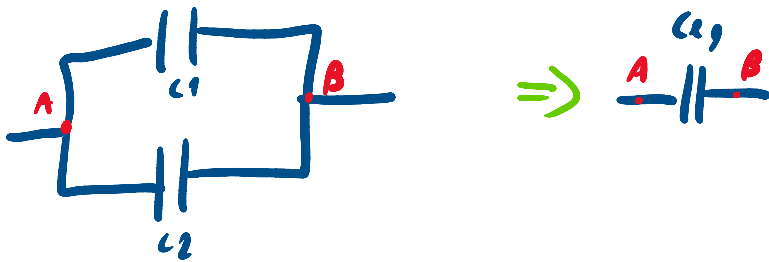
$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{\Delta V}$$

\$\Rightarrow\$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$\Rightarrow \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

• Condensatori in Parallelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2$$

\$\Rightarrow\$

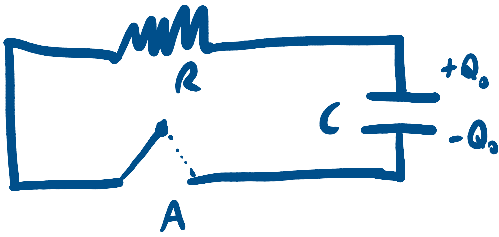
$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V_1} + \frac{Q_2}{\Delta V_2} = C_1 + C_2$$

$$C_{p9} = \frac{Q_{19}}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$



# Circuito RC

sabato 16 dicembre 2023 16:01



Se a  $t=0$  l'interruttore è stato chiuso

$\Rightarrow$  Inizia a fluire corrente all'interno del circuito.

Dunque

$$iR + \frac{q}{C} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{dq}{dt} \cdot R + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{CR}$$

$$\Rightarrow \int_{Q_0}^q \frac{dq}{q} = \int_{Q_0}^q -\frac{1}{CR} dt$$

$$\Rightarrow \ln(q) \Big|_{Q_0}^q = -\frac{1}{CR} (t) \Big|_{Q_0}^q$$

$\leftarrow$  LASCIO T GENERICO

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{1}{CR} \cdot t$$

$$\Rightarrow 1 + t$$

$$\Rightarrow \frac{q}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

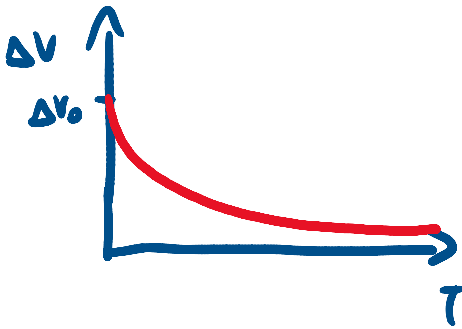
$$\Rightarrow q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sia  $\tau = RC$  la costante di tempo del circuito

$$\Rightarrow q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

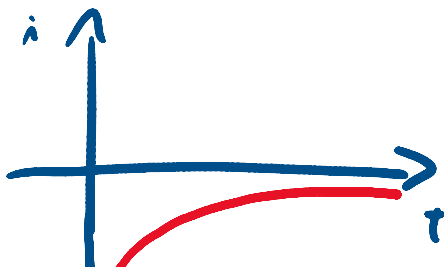
• Come varia  $\Delta V$  nel tempo:

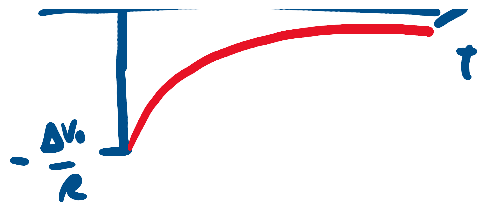
$$\Delta V = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \Delta V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



• Come varia la corrente:

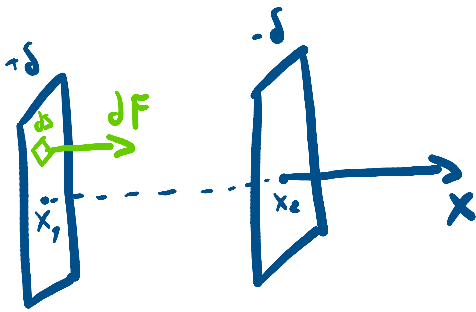
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = -\frac{1}{R} \Delta V_0 e^{-t/RC}$$





# Forza tra le Armature di un Condensatore

sabato 16 dicembre 2023 16:34



La Forza può essere calcolata in due modi:

- 1) La carica infinitesima  $dq$ , o causa delle cariche di segno opposto contenute sulle armature, risente di una forza, perpendicolare all'armatura considerata e diretta verso la seconda armatura, d'intensità:

$$dF = E_1 dq = E_1 \sigma dS$$

Perché

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow dF = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \sigma dS = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS$$

$$\Rightarrow F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot S \stackrel{\sigma = Q/S}{=} \frac{Q^2}{S^2} \cdot \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot S$$

⇒

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

2) Pensiamo di voler spostare di un tratto  $dx$  una delle due armature

Di conseguenza

$$dL = F \cdot dx$$

Poiché

$$dU = -dL$$

⇒

$$dU = -F dx$$

⇒

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

*Q = costante*

⇒

$$F = -\frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right)$$

Ora

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{x_2 - x_1}$$

condensatore  
Piano

Per cui

$$F = - \frac{Q^2}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{x_2 - x}{\epsilon_0 S} \right)$$

$$\Rightarrow F = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S}$$



# Campo Magnetico

sabato 16 dicembre 2023 16:49

Lo spazio in cui giace la calamita è sede di un Campo Magnetico.

Le cariche elettriche elettriche in movimento possono generare campi magnetici.

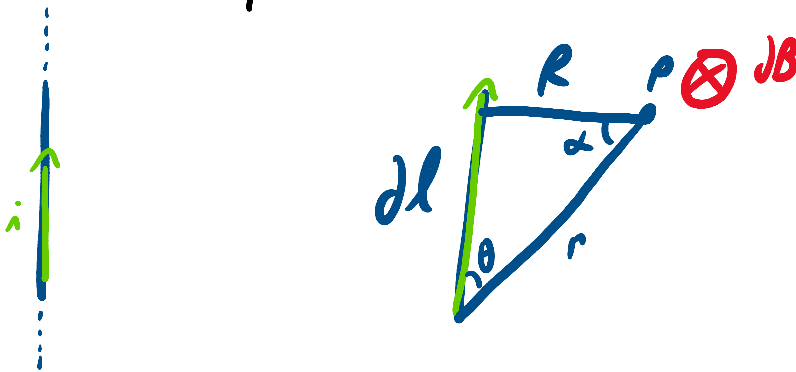
# Prima Legge di Laplace

lunedì 18 dicembre 2023 15:48

Se ho una corrente  $i$  che scorre in un conduttore, il campo magnetico  $\vec{B}$  prodotto dalle cariche che fluiscono nel tratto  $dl$  del filo è dato da:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \wedge \vec{r}}{r^3}$$

• Filo infinito percorso da corrente:



$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin(\theta)}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin(\theta)}{r^2} = \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin(\theta)}{r^2} \stackrel{\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha}{=} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{r^2} \stackrel{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)}{=} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \cos(\alpha)}{r^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_0 i \int dl \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{dl \cos(\alpha)}{r^2}$$

$\Rightarrow$

$$dB = \frac{\mu_0 n}{4\pi} \cdot \frac{R}{\cos^2(\alpha)} \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{1}{r^2} d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \cdot \frac{R}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{r^2} d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \cdot \frac{R}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{R}{\cos(\alpha)}\right)^2} d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \cdot \frac{R}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{\cos^2(\alpha)}{R^2} d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{R} d\alpha$$

$\Rightarrow$

$$dB = \frac{\mu_0 n}{4\pi R} \cos(\alpha) d\alpha$$

$\Rightarrow$

$$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 n}{4\pi R} \cos(\alpha) d\alpha = \frac{\mu_0 n}{4\pi R} \sin(\alpha) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 n}{2\pi R}$$

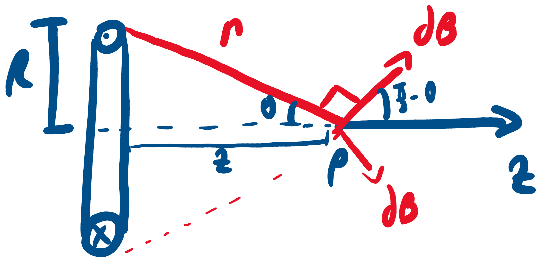
LEGE DI

BIOT-SAVART

• Spira Circolare Percorsa da  $n$

Coniche  $\frac{l}{R} = \tan(\alpha)$   
 $\Rightarrow l = R \tan(\alpha)$   
 $\Rightarrow dl = \frac{R}{\cos^2(\alpha)} d\alpha$   
 Inoltre  
 $R = r \cos(\alpha)$   
 $\Rightarrow r = \frac{R}{\cos(\alpha)}$

• Spira Circular (torta) da  $n$



$$dB_z = dB \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = dB \sin(\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{dl \cdot I}{r^3} \sin(\theta) = \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{dl \cdot I}{r^3} \cdot \sin(\theta) =$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{r^2} dl$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{r^2} dl$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{R}{r^3} dl =$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dl$$

$\Rightarrow$

$$dB_z = \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dl$$

Geometri  $r^2 = z^2 + R^2$   
 $\Rightarrow r = \sqrt{z^2 + R^2}$   
 Mathe  $R = r \sin(\theta)$   
 $\Rightarrow \sin(\theta) = \frac{R}{r}$

$$\Rightarrow B_z = \int \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dl$$

$$= \frac{\mu_0 n}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 n R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$$



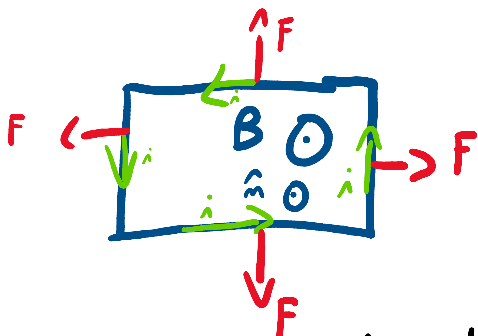
## Seconda Legge di Laplace

lunedì 18 dicembre 2023 16:27

La forza infinitesimale che risente un pezzo di filo percorso da corrente  $i$  è data, a causa della presenza, del campo magnetico, da:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Esempio: Consideriamo una spira percorso da corrente  $i$  che si trova in una regione in cui il campo magnetico è costante ed è diretto fuori dal foglio.



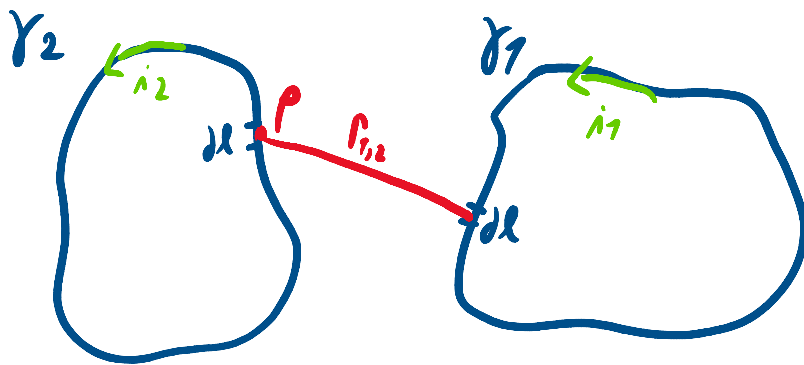
Se la spira è indeformabile  $\Rightarrow$  le  $F$  si eliminano a vicenda  
 $\Rightarrow$  C'È EQUILIBRIO



## Relazione tra I e II Legge di Laplace

Consideriamo due circuiti

Consideriamo due circuiti



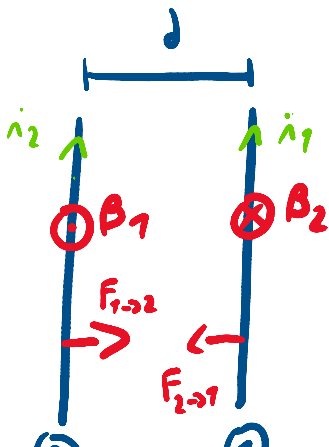
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \int_{\gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$dF_2 = i_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} \frac{d\vec{l}_2 \wedge d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$[F_1 = -F_2]$$

Esempio (Fili // Percorsi da corrente)





$$F_{1 \rightarrow 2} = i_2 l \frac{\mu_0 i_1}{2 \pi d}$$

$$F_{2 \rightarrow 1} = i_1 l \frac{\mu_0 i_2}{2 \pi d}$$

# Forza di Lorentz

martedì 9 gennaio 2024 00:07

È la forza subita da una carica che si muove in un campo magnetico e in un campo elettrico

$$F = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

# Teorema di Ampere

martedì 9 gennaio 2024 00:10

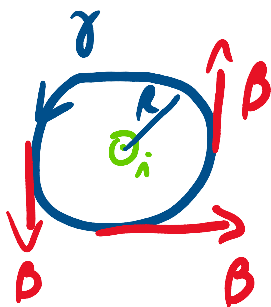
Si consideri un numero qualsiasi di circuiti  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  percorsi da correnti costanti e  $B$  indichi l'induzione magnetica risultante generata da tutti i circuiti in un punto qualunque dello spazio.

Sia  $\gamma$  una curva chiusa nella regione di spazio sede del campo magnetico e sopra  $\gamma$  sia fissato un verso positivo.

Allora vale

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

DIM



Da Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma} B dl = \oint_{\gamma} \frac{\mu_0 i}{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \oint_{\gamma} dl =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 i$$

$$= \frac{\mu_0 n}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 n$$



In generale

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_1 + i_2 + \dots + i_n)$$

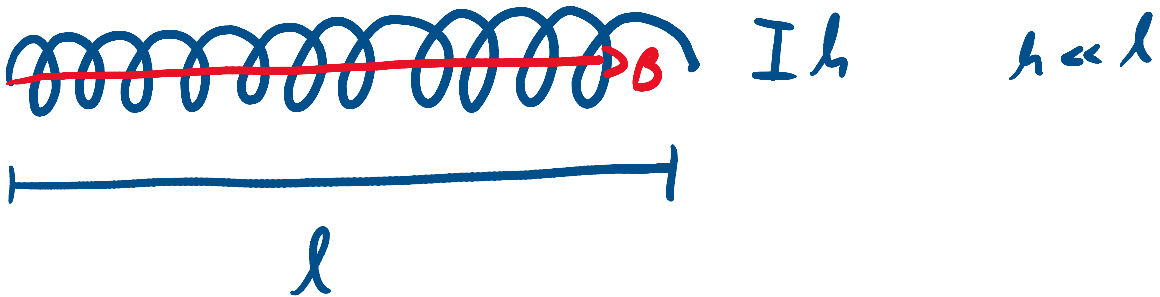
Correnti concatenate a  $\gamma$

La somma è algebrica  
 $\Rightarrow$  dipende dal verso di  $\gamma$

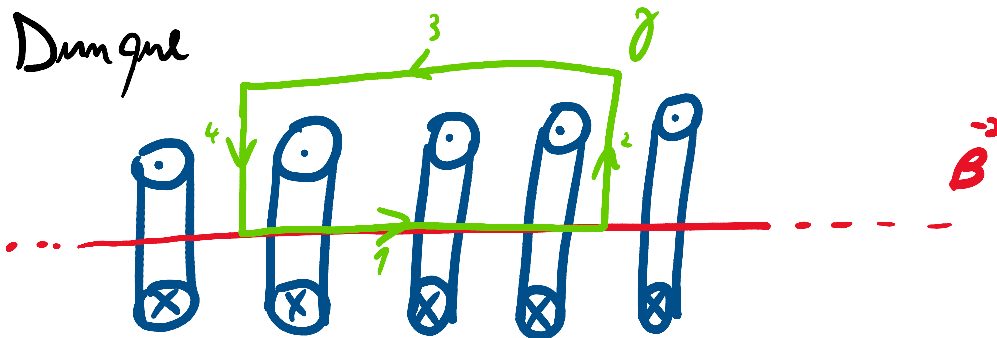


## APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI AMPERE

Consideriamo un SOLENOIDE IDEALE



Di conseguenza



Sfruttiamo il Teorema di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{enc} = \mu_0 \cdot I n l$$

Sfruttiamo il teorema di Ampère

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i_{\text{conc}}$$

Dunque

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{conc TOT}} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_{\text{conc}} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = B L$$

$\Rightarrow$

$$B L = \mu_0 i_{\text{conc}}$$

$\Rightarrow$

$$B L = \mu_0 i \cdot N$$

*numero di Spire*

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i N}{L}$$



## Terza Equazione di Maxwell

giovedì 11 gennaio 2024 15:29

$$\underline{\text{III Eq di Maxwell}} : \nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{J} + \epsilon_0 \frac{d \vec{E}}{dt} \right]$$

DIM

Dal teorema di Stokes si ha

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \cdot \vec{B} \hat{n} \, dS$$

inoltre

$$\oint_{\gamma} B \, dl = \mu_0 i_{\text{CORRE}}^{\text{TOT}}$$

$$\sum i_{\text{CORRE}} = \int_S \vec{J} \hat{n} \, dS$$

Per cui

$$\int_S \nabla \cdot \vec{B} \hat{n} \, dS = \mu_0 i_{\text{CORRE}}^{\text{TOT}} = \mu_0 \int_S \vec{J} \hat{n} \, dS$$

$$\Rightarrow \int_S (\nabla \cdot \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \hat{n} \, dS = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Dall'equazione di continuità di carica si ha:

Dall'equazione di continuità di carica si ha:

$$\underbrace{\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0}_{\text{Equazione di Continuità di carica}} \Rightarrow \begin{cases} \text{CASO STAZIONARIO} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \\ \text{CASO NON STAZIONARIO} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt} \end{cases}$$

Per cui, se vale  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  allora

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d}{dt} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{d}{dt} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \mathbf{E} \right) = 0$$

Da  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \mathbf{E} \right)$$



# Legge di Faraday-Lenz

giovedì 11 gennaio 2024 15:58

$$\xi = - \frac{d\phi_s(\vec{B})}{dt} \quad [\text{Legge Faraday-Lenz}]$$

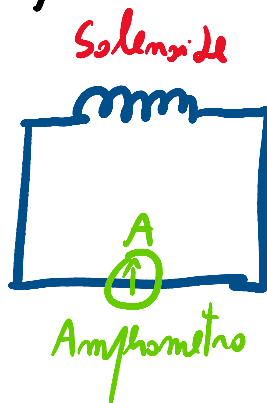
Da osservazioni sperimentali, Faraday si accorse che:

- 1) Così come le particelle producono  $\vec{E}$ , se sono in movimento generano  $\vec{B}$
- 2) Campi magnetici variabili nel tempo permettono alla corrente di circolare in un circuito in cui non è presente nessuna forza elettromotrice

1° CASO (Sono FERMI)



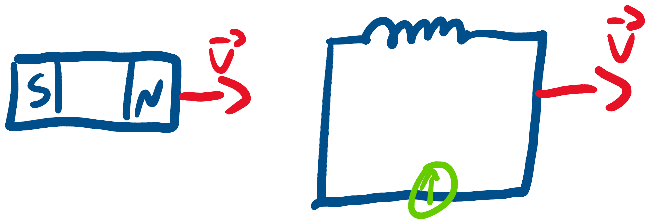
Solenoida



Non c'è corrente

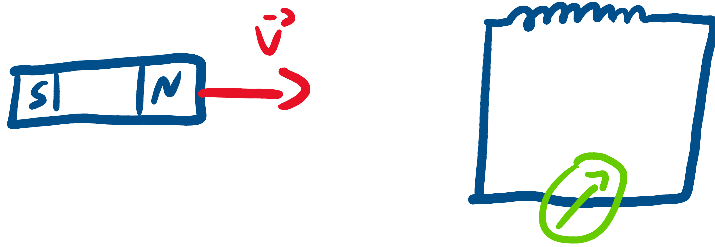
2° CASO (Si spostano ENTRAMBI) [Con Velocità costante]





Non c'è corrente

### 3° CASO



Il circuito è fermo

La calamita si AVVICINA

⇒

L'Amperometro misura corrente

### 4° CASO



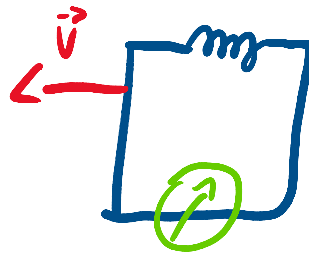
Circuito fermo

Calamita si ALLONTANA

⇒

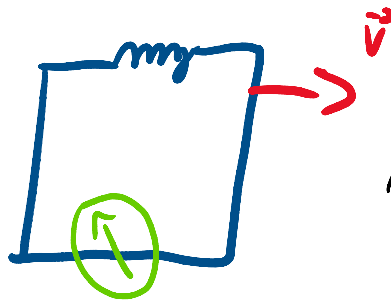
L'Amperometro misura corrente

### 5° CASO



L'Amperometro  
misura corrente

### 6° CASO



L'Amperometro  
misura corrente

Faraday verificò che la nascita di questa Forza Elettromotrice (f.e.m) indotta è data dalla variazione del flusso del campo magnetico, concatenato al circuito, nel tempo.

$$|\xi| = \frac{d\phi_s(t)}{dt}$$

Lenz ha contribuito con il segno

$$\xi = - \frac{d\phi_s(t)}{dt}$$



## Corrente indotta

$$i_{\text{INDOTTA}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

↙  $\mathcal{E}$  em  
↑ Resistenza

## Carica Indotta

$$q_{\text{INDOTTA}} = \int i_{\text{INDOTTA}} dt$$



# Quarta Equazione di Maxwell

giovedì 11 gennaio 2024 16:29

## IV Equazione di Maxwell

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{dB}{dt}$$

DIM

Sappiamo che  $\zeta = - \frac{d\phi_s(B)}{dt}$

Possiamo riscriverla come

$$\zeta = \oint_{\gamma} \vec{E} dl \neq 0$$

Allora

$$\oint_{\gamma} \vec{E} dl = - \frac{d\phi_s(B)}{dt}$$

$\Rightarrow$

$$\oint_{\gamma} \vec{E} dl = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds$$

Per il TEO di STOKES però

$$\oint_{\gamma} \vec{E} dl = \int_S \nabla \wedge \vec{E} \cdot \hat{n} ds$$

Also

$$\int_S \nabla_{\perp} E \cdot \hat{n} \, dS = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = \int_S - \frac{d}{dt} B \cdot \hat{n} \, dS$$

$\Rightarrow$

$$\nabla_{\perp} E = - \frac{d}{dt} \vec{B}$$



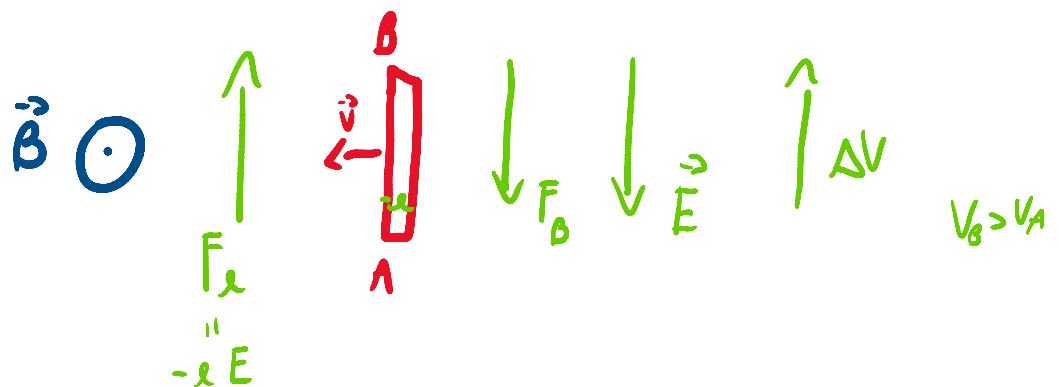
# Induzione

giovedì 11 gennaio 2024 16:46

## INDUZIONE

Immaginiamo di avere  $\vec{B}$  costante e una sbarretta conduttrice che si muove con velocità costante.

Tra i poli A e B della sbarretta si misura una differenza di potenziale  $\Delta V$



La forza magnetica spinge l'elettrone verso il basso

Si genera un campo elettrico istantaneamente uscente dalla carica positiva e entrante nella carica negativa.

Si crea una differenza di potenziale tra A e B

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -V \cdot l$$

$$F_B = F_m \Rightarrow qVB = E \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = vB$$



## AUTOINDUZIONE

In un circuito in cui scorre una corrente che varia nel tempo, all'interno del circuito stesso si genera una f.e.m. indotta che si oppone alla variazione della corrente.

È detta induttanza la costante di proporzionalità tra il flusso  $\Phi(B)$  e la corrente  $i$ :

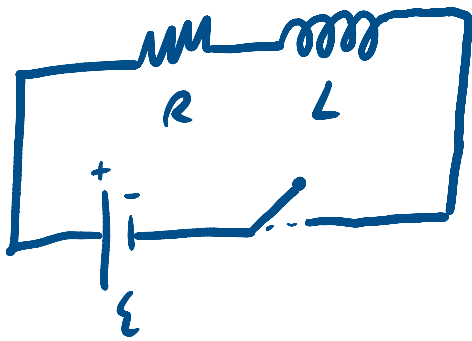
$$\rightarrow L = \frac{\Phi(B)}{i}$$

INDUTTANZA



# Circuiti RL

domenica 4 febbraio 2024 11:26



$$\varepsilon - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

⇒

$$L \frac{di}{dt} = \varepsilon - iR$$

⇒

$$\frac{1}{\varepsilon - iR} di = \frac{1}{L} dt$$

⇒

$$\int_0^i \frac{1}{\varepsilon - iR} di = \int_0^t \frac{1}{L} dt$$

⇒

$$-\frac{1}{R} \ln(\varepsilon - iR) \Big|_0^i = \frac{t}{L}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{R} \ln\left(\frac{\varepsilon - \lambda R}{\varepsilon}\right) = \frac{t}{L}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon - \lambda R}{\varepsilon}\right) = -\frac{tR}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon - \lambda R}{\varepsilon} = e^{-\frac{tR}{L}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon - \lambda R = \varepsilon e^{-\frac{tR}{L}}$$

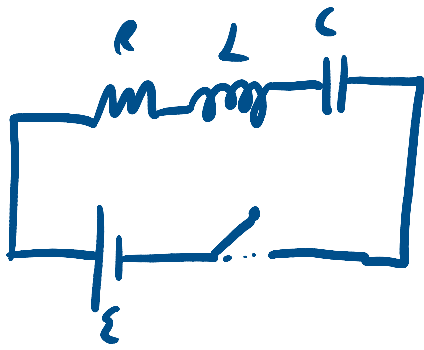
$$\Rightarrow \lambda R = \varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{tR}{L}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\varepsilon(1 - e^{-\frac{tR}{L}})}{R}$$

⑤

# Circuiti RLC

domenica 4 febbraio 2024 11:30



$$\varepsilon - iR - L \frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

⇒

$$\varepsilon - \frac{dQ}{dt} R - L \frac{d^2Q}{dt^2} - \frac{Q}{C} = 0$$

# Onde Elettromagnetiche

domenica 4 febbraio 2024 11:33

Studiamo le 4 equazioni di Maxwell nel vuoto.  
Nel vuoto il modo di  $\vec{B}$  ed  $\vec{E}$  è simmetrico

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \end{array} \right. \quad \text{nel vuoto } \rho=0, \vec{J}=0$$

Tale sistema ammette soluzioni ondulatorie.

Applichiamo il rotore a sinistra e a destra ad una delle ultime due equazioni del sistema:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = \nabla \wedge \left( -\frac{d\vec{B}}{dt} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \wedge \left( -\frac{d\vec{B}}{dt} \right)$$

$\Rightarrow$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{d}{dt} (\nabla \wedge \vec{B})$$

$\Rightarrow$

$$-\nabla^2 \vec{E} = \frac{d}{dt} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 E = -\frac{d}{dt} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 E + \frac{d}{dt} \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{dE}{dt} \right) = 0$$

[Eq. di D'Alembert]

Analogamente per  $\vec{B}$  risulta che

$$-\nabla^2 B + \frac{d}{dt} \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{dB}{dt} \right) = 0$$

[Eq. di D'Alembert]

velocità della luce

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E}{dt^2} - \nabla^2 E = 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{d^2 B}{dt^2} - \nabla^2 B = 0 \end{cases}$$